1.7.2 Určování definičních oborů I

Předpoklady: 010701

Závěr minulo hodiny:
Pro hledání definičního oboru používáme jediné pravidlo.

Z definičního oboru vylučujeme čísla, pro která nejsme schopni výraz vyčíslit (provést všechny požadované operace).

Pedagogická poznámka: Studentům je potřeba opakovaně zdůrazňovat, že definiční obor sestavujeme na základě jediného pravidla – „vylučujeme čísla, se kterými nelze provést všechny operace ve výrazu". Nic víc by si pamatovat neměli, protože hlavně ti méně nadaní mají sklon k tvorbě pravidel typu: „když se dělí, nesmí být *x* nula" nebo „pod odmocninou musí být *x* větší než nula" a vůbec neberou ohled na to, zda je pod odmocninou pouze *x* nebo nějaký výraz, který *x* obsahuje.

Př. 1: Urči definiční obor výrazu pro proměnnou *x* ve výrazu $\frac{x-1}{x+2}$ a urči jeho hodnotu pro $x=1$.

Ve výrazu je dělení, nelze dělit nulou, proto $x+2\neq 0$ a tedy $x\neq -2 \Rightarrow D(v)=R-\{-2\}$.
Hodnota výrazu $\frac{x-1}{x+2}=\frac{1-1}{1+2}=\frac{0}{3}=0$.

Př. 2: Projdi řešení předchozího příkladu a najdi jednotlivé kroky, po kterých jsme postupovali.

Při určování definičního oboru postupujeme takto:
- Zjistíme nebezpečnou operaci (dělení).
- Najdeme výraz, který do ní vstupuje ($x+2$).
- Zajistíme, aby výraz nenabýval zakázanou hodnotu ($x+2\neq 0$).
- Z předešlé podmínky vypočítáme zakázanou hodnotu proměnné ($x\neq -2$).
- Všechna ostatní čísla zahrneme do definičního oboru $D(v)=R-\{-2\}$.

Určování definičního oboru je dobrou příležitostí, jak nacvičovat postup podle pravidel a odolávání svodům „rychlého" řešení.

Př. 3: Urči definiční obory výrazu $\frac{\sqrt{y-3}}{x-4}$ pro obě jeho proměnné a urči jeho hodnotu pro:
a) $x=1; y=4$ b) $x=5; y=2$.

Dvě vachrlaté operace – dělení a odmocnina.
Nelze dělit nulou $\Rightarrow$ $x-4\neq 0 \Rightarrow x-4\neq 0 \Rightarrow x\neq 4$ $D(v)_x=R-\{4\}$
Odmocnina pouze z nezáporných čísel $y-3\geq 0 \Rightarrow y\geq 3$ $D(v)_y=\langle 3;\infty)$

Hodnota výrazu pro $x=1; y=4$: $\frac{\sqrt{y-3}}{x-4}=\frac{\sqrt{4-3}}{1-4}=-\frac{1}{3}$.

Hodnota výrazu pro $x=5; y=2$: $\frac{\sqrt{y-3}}{x-4}=\frac{\sqrt{2-3}}{5-4}=\frac{\sqrt{-1}}{1}$ $\Rightarrow$ výraz není možné spočítat (což bylo jasné ihned, protože hodnota $y=2$ nepatří do definičního oboru.

Př. 4: Urči hodnotu výrazu $\frac{x-2}{x^2+x-12}$ pro: a) $x=-2$, b) $x=3$.

a) $\frac{x-2}{x^2+x-12}=\frac{(-2)-2}{(-2)^2+(-2)-12}=\frac{-4}{-10}=\frac{2}{5}$

b) $\frac{x-2}{x^2+x-12}=\frac{3-2}{3^2+3-12}=\frac{1}{0}$ $\Rightarrow$nulou nelze dělit $\Rightarrow$ pro číslo $x=3$ není možné výraz spočítat, nepatří tedy do definičního oboru výrazu a nemá smysl se ptát, jakou hodnotu pro něj výraz má.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je test na dodržování pravidel. I když všichni vědí, že nulou se nedá dělit, přesto se vždy najde pár takových, kteří to úspěšně udělají.

Př. 5: Najdi co nejrychlejší způsob jak rozhodnout, jestli čísla $\{-2;0;1\}$ patří do definičního oboru výrazu $\frac{x^2-2}{x^2-4x+3}$.

Bylo by možné rozhodnout tak, že určíme definiční obor a zjistíme, zda do něj čísla patří nebo ne. Vzhledem k tomu, že je čísel málo, je daleko rychlejší zkusit je dosadit do jmenovatele zlomku a spočítat jej. Pokud vyjde ve jmenovateli nula, číslo do definičního oboru nepatří, pokud vyjde nenulový, číslo do něj patří.

$x=-2 \Rightarrow x^2-4x+3=(-2)^2-4(-2)+3=15 \Rightarrow$ číslo –2 do definičního oboru patří.

$x=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0^2-4\cdot 0+3=3 \Rightarrow$ číslo 3 do definičního oboru patří.

$x=1 \Rightarrow x^2-4x+3=1^2-4\cdot 1+3=0 \Rightarrow$ číslo 1 do definičního oboru nepatří, dělili bychom nulou.

Pedagogická poznámka: Cvičení na zkostnatělost myšlení. Jen málo studentů bude opravdu uvažovat o nejsnazším řešení, většina bude opakovat postup z předchozích příkladů.

Pedagogická poznámka: Ve všech následujících příkladech jde o určování definičního oboru. Protože však dělají studentům značné potíže, jsou rozděleny do jednotlivých příkladů, aby kontrola probíhala průběžně a značná část třídy nezůstala zcela bezmocně přihlížet. Přesto bych se přimlouval za to, aby studenti dostali šanci spočítat příklady špatně a sami si zkusili udělat chyby. Pravděpodobnost, že si dají příště pozor, je tak větší (i když stále poměrně malá).

Př. 6: Urči definiční obory výrazů. a) $\frac{x+3}{x}$ b) $\frac{x}{x-2}$ c) $\sqrt{x+2}$ d) $\sqrt{-x}$

a) $\frac{x+3}{x}$

Nebezpečná operace dělení $\Rightarrow$ $x \neq 0$ $\Rightarrow$ $D(v)_x = R - \{0\}$.

b) $\frac{x}{x-2}$

Nebezpečná operace dělení $\Rightarrow$ $x-2 \neq 0$ $\Rightarrow$ $x \neq 2$ $\Rightarrow$ $D(v)_x = R - \{2\}$.

c) $\sqrt{x+2}$

Nebezpečná operace odmocnina $\Rightarrow$ $x+2 \geq 0$ $\Rightarrow$ $x \geq -2$ $\Rightarrow$ $D(v)_x = \langle -2; \infty)$.

d) $\sqrt{-x}$

Nebezpečná operace odmocnina $\Rightarrow$ $-x \geq 0$. Potřebujeme podmínku pro x, ne pro $-x$ $\Rightarrow$ upravíme nerovnici: $-x \geq 0 \quad / +x$

$-x + x = 0 \geq x$ $\Rightarrow$ $0 \geq x$ $\Rightarrow$ $D(v)_x = (-\infty; 0\rangle$.

Pedagogická poznámka: Zdroje problémů:

opouštění pravidla a nahrazování pseudopravidly typu „*x* nesmí být nula“,
problémy s intervaly,
nejasnosti ohledně množinových zápisů (proč jsou někde mínusy a jinde ne),
neschopnost přepnout do podprogramu,
úpravy nerovnic.
V bodě d) se snažím vyhnout násobení nerovnice (-1), jde o úplně nový typ úpravy, který v tomto okamžiku slabší žáci nepřijmou.

Př. 7: Urči definiční obor výrazu $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2x+3}$.

Nebezpečná operace dělení třikrát, musíme dosazovat do všech zlomků $\Rightarrow$ každý zlomek řešíme zvlášť a číslo, které do něj nemůžeme dosadit, vyloučíme:

- 1. zlomek dělení $\Rightarrow$ $x+1 \neq 0$ $\Rightarrow x \neq -1$,
- 2. zlomek dělení $\Rightarrow$ $x-2 \neq 0$ $\Rightarrow x \neq 2$,
- 3. zlomek dělení $\Rightarrow$ $2x+3 \neq 0$ $\Rightarrow x \neq -\frac{3}{2}$,

$\Rightarrow$ $D(v) = R - \left\{-\frac{3}{2}; -1; 2\right\}$.

Př. 8: Urči definiční obor výrazu $\frac{1}{x^2+1}$.

Nebezpečná operace: dělení $\Rightarrow$ $x^2 + 1 \neq 0$ $\Rightarrow$ $x^2 \neq -1$ - to platí vždy $\Rightarrow$ $D(v) = R$.

Př. 9: Urči definiční obor výrazu $\sqrt{1-|x|}$ a vyjádři ho pomocí intervalů.

Nebezpečná operace: odmocnina $\Rightarrow$ $1-|x|\geq 0$ $\Rightarrow$ $1\geq |x|$ $\Rightarrow$ řešíme nerovnici s absolutní hodnotou $\Rightarrow$ hledáme čísla, která jsou od nuly vzdálena o jedna nebo méně $\Rightarrow$ $D(v)=\langle -1;1\rangle$.

Pedagogická poznámka: Je dobré upozorňovat studenty (hlavně ty, kteří příklad nespočítají sami), že v něm nebylo nic nového, pouze jedno pravidlo ze začátku hodiny a pak opakování věcí, které by dávno měli znát.
Na tomto příkladu jsou dvě důležité věci:
“schopnost přepínat do podprogramu“ – jde o to, aby studenti dokázali ve chvíli, kdy dojdou k nerovnici $1\geq |x|$, začít pracovat na jejím řešení, stejně jako kdyby sama nerovnice byla příkladem, který mají spočítat (to vůbec není samozřejmé) a navíc, aby ve chvíli, kdy nerovnici dořeší, věděli, že šlo pouze o část řešení něčeho jiného a zbytek práce teprve zbývá dokončit,
“schopnost si něco pamatovat“ – řešení nerovnic s absolutní hodnotou je už vzdálenější látkou a není vůbec samozřejmé, že si studenti budou něco pamatovat, i když mají k dispozici sešit nebo jiné pomůcky.

Př. 10: Urči definiční obor výrazu $\frac{2x}{|x-1|}$.

Nebezpečná operace: dělení $\Rightarrow$ $|x-1|\neq 0$ $\Rightarrow$ $x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$ $\Rightarrow$ $D(v)=R-\{1\}$.

Př. 11: Urči definiční obor výrazu $\sqrt{|x+2|}$.

Nebezpečná operace: odmocnina $\Rightarrow$ $|x+2|\geq 0$ - to platí vždy $\Rightarrow$ $D(v)=R$.

Př. 12: Sbírka příklad 1

Shrnutí: Pro určování definičního oboru nám stačí jediné pravidlo: vyloučíme všechna čísla, pro která nedokážeme výraz spočítat.